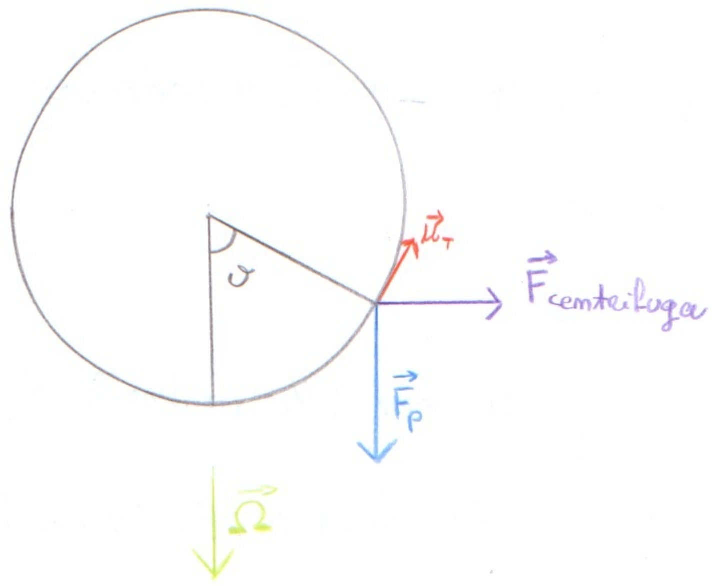
Soluzione appello 14 luglio 2014

Esercizio 1)



(1) Contribuiscono a $\ddot{\vartheta}$ soltanto le componenti tangenziali alla circonferenza delle forze che agiscono sulla particella.

$$|\vec{F}_p| = mg \qquad |\vec{F}|_{centrifuga} = m\,\Omega^2 R \sin\vartheta$$

Da cui si ottiene:

$$\tau_y = \vec{R} \times \left(-mg\sin\theta\,\hat{u}_T + m\Omega^2 R\sin\theta\cos\theta\,\hat{u}_T\right)$$

$$= +mgR\sin\theta - m\Omega^2 R^2 \sin\theta\cos\theta$$

(2)

Anche l'accelerazione della particella dipende soltanto dalle componenti tangenziali alla circonferenza delle forze.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$v = R\omega = R\frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$mR\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta + m\Omega^2 R\sin\theta\cos\theta$$

②

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{R}\sin\vartheta + \Omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta$$

usando l'approssimazione per piccoli angoli

$$\sin\vartheta \approx \vartheta \qquad \cos\vartheta \approx 1$$

si ottiene

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{R}\vartheta + \Omega^2\vartheta = -\left(\frac{g}{R} - \Omega^2\right)\vartheta$$

con $\overline{\omega}^2 = \frac{g}{R} - \Omega^2 \quad \rightarrow \overline{\omega} = \sqrt{\frac{g}{R} - \Omega^2}$

$$\begin{cases} \vartheta(t) = A\cos(\overline{\omega}t) + B\sin(\overline{\omega}t) \\ \omega(t) = -\overline{\omega}A\sin(\overline{\omega}t) + \overline{\omega}B\cos(\overline{\omega}t) \end{cases}$$

Condizioni iniziali:

$\vartheta(0)=0$ $\qquad V(0)=0{,}25\,m/s$

$$\overline{\omega}=\sqrt{\frac{g}{R}-\Omega^2}=\sqrt{\frac{9{,}8}{1}-(-2{,}4)^2}=2$$

$$V=R\omega \to \omega=\frac{V}{R}=\frac{0{,}25\,m/s}{1\,m}=0{,}25\,\frac{rad}{s}$$

$0=\vartheta(0)=A$

$$0{,}25=\omega(0)=\overline{\omega}B \to B=\frac{0{,}25}{2}=\frac{1}{8}$$

La legge oraria è quindi

$$\begin{cases}\vartheta(t)=\frac{1}{8}\sin(\overline{\omega}t)=\frac{1}{8}\sin(2t)\\ \omega(t)=\frac{1}{4}\cos(2t)\end{cases}$$

3)

La reazione vincolare della circonferenza "risponde" alle forze radiali:

$$\vec{F}_0 = -m\Omega v \hat{e}_y + (mg + m\omega^2 R)\hat{e}_z$$

"risposta alla forza di Coriolis"

"risposta alla forza peso"

"risposta alla forza centrifuga della rotazione della particella"

4) Al tempo t_0, l'unica forza che compie lavoro è l'impulso. Si ha dunque

$$W_{impulso} = W_{TOT} = \Delta E_k = \frac{1}{2} m V_0^2$$

Teorema delle forze vive